

Дәріс №3. Екі айнымалы функцияның экстремумы.

Анықтама 1. $z = f(x, y)$ функциясының $M_0(x_0, y_0)$ максимум нүктесі деп аталады, егер осы нүктенің $U(M_0)$ маңайдағы барлық (x, y) үшін мына теңсіздік

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

орындалса.

Егер $U(M_0)$ маңайдағы барлық (x, y) үшін мына

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

орындалса, онда M_0 нүктесі минимум нүктесі деп аталады.

Максимум нүктесіндегі функция мәні $f(x_0, y_0)$ функциясының максимумы деп, ал минимум нүктесіндегі мәні - минимумы деп аталады.

Максимум және минимум нүктелері – функцияның экстремаль нүктелері деп аталады, ал максимумдер мен минимумдер - функцияның экстремумдері деп аталады.

$z = f(x, y)$ функциясы M_0 нүктесінің кейбір аймағында анықталсын. Егер M_0 нүктесінде f'_x, f'_y нольге тең болса, не анықталмаса, онда M_0 нүктесі $z = f(x, y)$ функцияның күдікті (кризистік) нүктесі деп аталады.

Келесі теорема бір айнымалы функцияның экстремумның қажетті шартына ұқсас.

Теорема 1 (экстремумның қажетті шарты)

Егер $M_0(x_0, y_0)$ $z = f(x, y)$ функциясының экстремаль нүктесі болса, онда M_0 осы функцияның күдікті нүктесі болады.

Дәлелдеуі. Бір айнымалы x – тің функциясын $z = f(x, y_0) = g(x)$ қарайық. Экстремаль нүктенің анықтамасынан M_0 нүктесінің $g(x)$ функциясы үшін экстремаль нүкте болады. Бір айнымалы функцияның экстремумның қажетті шарты бойынша $M_0 g(x)$ -тің күдікті нүктесі екені шығады, немесе

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = \begin{cases} 0 \\ \text{болмайды} \end{cases}$$

$z = f(x_0, y) = h(y)$ функциясын қарастырып мынаны аламыз:

$$h'(y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \begin{cases} 0 \\ \text{болмайды} \end{cases}$$

Мысал 1. $O(0,0)$ нүктесі $z = x^2 + y^2$ функциясының минимум нүктесі болады, себебі $z(0,0) = 0$, ал басқа барлық нүктелерде $z(x, y) > 0$.

$z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, мына жүйе

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

күдікті $O(0,0)$ нүктені береді.

Мысал 2. $z = x^2 - y^2$ функциясының $O(0,0)$ нүктесі экстремаль нүктесі болмайды, себебі оның кез келген аймағында функция $z(0,0) = 0$, егер $y = 0$, 0 -ден үлкен де, ал $x = 0$ болғанда 0 -ден кіші де мәндер қабылдайды.

$z'_x = 2x$, $z'_y = -2y$, мына жүйе

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

күдікті $O(0,0)$ нүктені береді.

Бұл мысалдан күдікті нүктенің экстремальдық нүкте болмауы да мүмкін.

Теорема 2. (Экстремумның жеткілікті шарттары.)

$z = f(x, y)$ функциясы өзінің күдікті $M_0(x_0, y_0)$ нүктесінің кейбір аймағында 3 рет дифференциалданатын болсын.

$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C, D = AC - B^2$ деп белгілейік.

Онда:

- 1) Егер $D > 0$ болса, онда M_0 $z = f(x, y)$ үшін экстремаль нүктесі болады, егер $A > 0$ ($C > 0$) болса, онда бұл – минимум нүктесі, ал егер $A < 0$ ($C < 0$) болса, онда M_0 – максимум нүктесі болады.
- 2) Егер $D < 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0)$ -нүктесінде экстремум жоқ.

$D = 0$ болғанда экстремум табу үшін қосымша зерттеулер қажет. Дәлелдеусіз.

Мысал. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функциясының экстремаль нүктелерімен экстремумдерін табайық.

$f'_x = 3x^2 - 3y, f'_y = 3y^2 - 3x$ болғандықтан барлық (x, y) үшін, критикалық нүктелерді табу үшін теңдеулер жүйесін шешу керек

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Бұдан екі шешуін аламыз

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ және } \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

және екі $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$ күдікті нүктелерді табамыз. Екінші ретті дербес туындыларды тауып және әрбір нүктені экстремумның жеткілікті шарты бойынша зерттейміз.

$$f''_{xx} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x, f''_{xy} = (3x^2 - 3y)'_y = -3, f''_{yy} = (3y^2 - 3x)'_y = 6y.$$

а) $M_1(0,0)$. Бұл жағдайда:

$$A = f''_{xx}(0,0) = 0; B = f''_{xy}(0,0) = -3; C = f''_{yy}(0,0) = 0; D = AC - B^2 = -9 < 0.$$

Сондықтан M_1 нүктесінде экстремум жоқ.

б) $M_2(1,1)$. Бұл жағдайда:

$$A = f''_{xx}(1,1) = 6; B = f''_{xy}(1,1) = -3; C = f''_{yy}(1,1) = 6; D = AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

M_2 экстремаль нүкте. $A, C > 0$ болғандықтан, бұл – минимум нүктесі. M_2 нүктесіндегі функцияның мәні $f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$ - функцияның минимумын береді.